第4期 2012年4月
电子学报 ACTA ELECTRONICA SINICA
Vol.40 No.4 Apr. 2012

# 模态逻辑 S4 的覆盖语义及其完备性

于 海[1],詹婉荣[1],张瑞玲[2]
(1.洛阳师范学院数学科学学院,河南洛阳 471022; 2.洛阳师范学院信息技术学院,河南洛阳 471022)

**摘 要:** 基于第六种覆盖粗糙集模型提出了模态逻辑 $S4$ 的覆盖语义,利用覆盖模型与 Kripke 模型之间的关系,证明了覆盖语义的可靠性和完备性定理.进一步讨论了覆盖语义与 Alexandrov 拓扑语义之间的关系.证明了覆盖语义与 Alexandrov 拓扑语义是和谐一致的.

**关键词:** 模态逻辑; 覆盖语义; Kripke 语义; 拓扑语义; 完备性
**中图分类号:** O142, TP301 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 04-0745-06
**电子学报 URL:** http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.04.020

# Covering Semantics of Modal Logic $S4$ and its Completeness

YU Hai[1], ZHAN Wan-rong[1], ZHANG Rui-ling[2]
(1. *Academy of Mathematics and Science, Luoyang Normal College, Luoyang, Henan* 471022, *China*;
2. *Academy of Information Technology, Luoyang Normal College, Luoyang, Henan* 471022, *China*)

**Abstract:** Based on the sixth type of covering-based rough set model, covering semantics of modal logic $S4$ is proposed. The reliability and completeness theorems with respect to covering semantics are proved by means of the relationships between covering model and Kripke model. Moreover, the relationships between covering semantics and Alexandrov topological semantics are also discussed. It is proved that covering semantics and Alexandrov topological semantics are harmonious and consistent.

**Key words:** modal logic; covering semsntics; Kripke semantics; topological semantics; completeness

## 1 引言

模态逻辑是非经典逻辑的一个重要分支,是计算机科学有力的分析工具[1~8].它不仅是程序语义描述的有力工具,是时态逻辑和动态逻辑的理论基础,而且在人工智能中的知识表示方面有着广泛的应用.模态逻辑与其它知识表示理论有着许多联系,尤其与粗糙集理论联系更加密切[9,10].从算子的观点来看,粗糙集模型中的近似算子可以和模态逻辑中的必然性算子和可能性算子相联系起来.在模态逻辑的公理化系统中,如果必然性算子$\Box$用下近似算子来代替,可能性算子$\Diamond$用上近似算子来代替,非联结符$\neg$用集合补运算$\sim$代替,合取联结符$\wedge$用集合交运算$\cap$代替,析取联结符$\vee$用集合并运算$\cup$代替,蕴涵$\rightarrow$用集合包含$\subseteq$代替,那么得到的公理化系统就是一个粗糙集代数系统[9,10].因此结合粗糙集理论来研究模态逻辑将是一个很有意义的研究方向.

模态逻辑是经典逻辑增加模态算子后的扩充,其形式推理的公理系统也源于经典逻辑公理系统,只是增加了带有模态算子的公理.关于模态逻辑的语义,最著名、采用最多的是 Kripke 语义.另外还有代数语义、邻域语义以及拓扑语义[2].经典粗糙集模型是建立在等价关系之上的,但在很多实际问题中,对象之间的等价关系很难构造,或者对象之间本质上没有等价关系.基于此,许多研究者将划分扩展到论域上的覆盖,从而形成覆盖粗糙集理论.根据不同的物理意义,人们已经提出了七种覆盖粗糙集模型[11,12].本文基于第六种覆盖粗糙集模型,提出了模态逻辑 $S4$ 的覆盖语义,并证明了覆盖语义的可靠性和完备性定理.最后研究了覆盖语义与拓扑语义的关系.

## 2 预备知识

### 2.1 广义粗糙集和第六种覆盖粗糙集模型

本小节简单介绍广义粗糙集模型和第六种覆盖粗糙集模型.

**定义 1**[9~11] 设 $U$ 是非空论域,$R$ 为 $U$ 上一个任意二元关系,称$(U,R)$为广义近似空间.对于任意 $X\subseteq U$,$X$ 的上近似$\overline{R}(X)$和下近似$\underline{R}(X)$分别定义为:

$$\overline{R}(X)=\{x\in U \mid R_S(x)\cap X\neq\varnothing\},$$

收稿日期:2011-05-04;修回日期:2012-02-03
基金项目:国家自然科学基金(No.61050004);河南省基础与前沿研究计划(No.082300410270)

$\underline{R}(X)=\{x\in U \mid R_S(x)\subseteq X\}$,

其中,$R_S(x)=\{y\in U \mid (x,y)\in R\}$.

**命题 1**[9,11] 设 $R$ 是论域 $U$ 上任意二元关系,则上、下近似算子$\overline{R}$、$\underline{R}$满足下列性质:$\forall X,Y\subseteq U$,

(1)$\overline{R}(X)=\sim\underline{R}(\sim X)$,$\underline{R}(X)=\sim\overline{R}(\sim X)$.

其中 $\sim X=U-X$ 表示 $X$ 的余集.

(2)$\overline{R}(\varnothing)=\varnothing$,$\underline{R}(U)=U$.

(3)$\overline{R}(X\cup Y)=\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y)$,

$\underline{R}(X\cap Y)=\underline{R}(X)\cap\underline{R}(Y)$.

(4)$X\subseteq Y\Rightarrow\overline{R}(X)\subseteq\overline{R}(Y)$,$\underline{R}(X)\subseteq\underline{R}(Y)$.

进一步,若 $R$ 是自反的二元关系,则

(5)$\underline{R}(X)\subseteq X\subseteq\overline{R}(X)$.

若 $R$ 是传递的二元关系,则

(6)$\underline{R}(X)\subseteq\underline{R}(\underline{R}(X))$,$\overline{R}(\overline{R}(X))\subseteq\overline{R}(X)$.

**定义 2**[11,12] 设 $U$ 是非空论域,$C$ 为 $U$ 的子集族,若任意 $K\in C$,$K\neq\varnothing$,且$\bigcup C=U$.则称 $C$ 为 $U$ 的一个覆盖,称$(U,C)$为覆盖近似空间.

**定义 3**[11,12] 设$(U,C)$为覆盖近似空间,$x\in U$,称 $N_C(x)=\bigcap\{K \mid x\in K\in C\}$为 $x$ 的邻域.

本文中用 $P(U)$表示论域 $U$ 的幂集.

**定义 4**[11,12] 设$(U,C)$为覆盖近似空间,算子 $XH_C$ 和 $XL_C$:$P(U)\rightarrow P(U)$定义如下:$\forall X\subseteq U$,

$XH_C(X)=\{x\in U \mid N_C(x)\cap X\neq\varnothing\}$,

$XL_C(X)=\{x\in U \mid N_C(x)\subseteq X\}$.

分别称 $XH_C$ 和 $XL_C$ 为第六种覆盖上、下近似算子.

**命题 2**[11] 第六种覆盖上、下近似算子 $XH_C$ 和 $XL_C$ 具有以下性质:$\forall X,Y\in P(U)$,

(1)$XH_C(X)=\sim(XL_C(\sim X))$,

$XL_C(X)=\sim(XH_C(\sim X))$.

(2)$XH_C(\varnothing)=\varnothing$,$XL_C(U)=U$.

(3)$XL_C(X)\subseteq X\subseteq XH_C(X)$.

(4)$XH_C(X\cup Y)=XH_C(X)\cup XH_C(Y)$,

$XL_C(X\cap Y)=XL_C(X)\cap XL_C(Y)$.

(5)$XH_C(XH_C(X))=XH_C(X)$,

$XL_C(XL_C(X))=XL_C(X)$.

(6)若 $X\subseteq Y$,则 $XH_C(X)\subseteq XH_C(Y)$,

$XL_C(X)\subseteq XL_C(Y)$.

(7)$\forall K\in C$,$XL_C(K)=K$.

**注:**命题 1 和命题 2 中的性质,在许多文献中都是在论域 $U$ 为有限集时给出的,实际上容易证明当 $U$ 为无限集时,这些性质仍然成立.

## 2.2 S4 的 Kripke 语义

**定义 5**[3] $S4$ 的 Kripke 模型是一个三元组 $M=(W,R,V)$,这里 $W$ 是非空集,$R$ 为 $W$ 上自反、传递的二元关系,$V$ 是映射 $V:\Phi\rightarrow P(W)$,称 $V$ 为赋值.

**定义 6**[3] 设 $M=(W,R,V)$是 $S4$ 的 Kripke 模型,$w\in W$,$\varphi\in$ Form$(\Diamond,\Phi)$,$w$ 满足$\varphi$,记作 $M,w\Vdash_K\varphi$,可归纳定义如下:

(i)$M,w\Vdash_K p$ 当且仅当$w\in V(p)$,$p\in\Phi$.

(ii)$M,w\Vdash_K\bot$永远不成立.

(iii)$M,w\Vdash_K\neg\varphi$ 当且仅当$M,w\Vdash_K\varphi$ 不成立.

(iv)$M,w\Vdash_K\varphi\vee\psi$ 当且仅当$M,w\Vdash_K\varphi$ 或$M,w\Vdash_K\psi$.

(v)$M,w\Vdash_K\Diamond\varphi$ 当且仅当$\exists u\in W$,$wRu$,使 $M,u\Vdash_K\varphi$.

这时称 $\varphi$ 是可满足的.设 $\Gamma\subseteq$ Form$(\Diamond,\Phi)$,如果存在模型 $M$ 和点 $w$ 使得$\forall\varphi\in\Gamma$ 均有 $M,w\Vdash_K\varphi$,则称 $\Gamma$ 可满足.又,如果$\forall w\in W$ 均有 $M,w\Vdash_K\varphi$,则称 $\varphi$ 在$M$ 中全局真,记作 $M\Vdash_K\varphi$.

**命题 3**[3] 设 $M=(W,R,V)$是 $S4$ 的 Kripke 模型,令 $V(\varphi)=\{w\in W \mid M,w\Vdash_K\varphi\}$,$\varphi\in$ Form$(\Diamond,\Phi)$.则

(i)$V(\neg\varphi)=\sim V(\varphi)$.

(ii)$V(\varphi\vee\psi)=V(\varphi)\cup V(\psi)$.

(iii)$V(\varphi\wedge\psi)=V(\varphi)\cap V(\psi)$.

(iv)$V(\varphi\rightarrow\psi)=\sim V(\varphi)\cup V(\psi)$.

(v)$V(\Box\varphi)=\underline{R}(V(\varphi))$.

(vi)$V(\Diamond\varphi)=\overline{R}(V(\varphi))$.

**定义 7**[3] 设 $\varphi\in$ Form$(\Diamond,\Phi)$,如果对每个 Kripke 模型 $M=(W,R,V)$均有 $M\Vdash_K\varphi$,则称 $\varphi$ 为 Kripke 有效公式,记作$\Vdash_K\varphi$.

**定理 1**[3] ($S4$ 的 Kripke 可靠性定理)系统 $S4$ 中的定理都是 Kripke 有效公式,即

若$\vdash_{S4}\varphi$,则$\Vdash_K\varphi$,$\varphi\in$ Form$(\Diamond,\Phi)$.

**定理 2**[3] ($S4$ 的 Kripke 强完备性定理)在系统 $S4$ 中,$\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq$ Form$(\Diamond,\Phi)$,则

$\Gamma\vdash_{S4}\varphi$,当且仅当 $\Gamma\Vdash_K\varphi$.

## 2.3 S4 的拓扑语义

**定义 8**[3] 设$(W,T)$是一个拓扑空间,$V$:Form$(\Diamond,\Phi)\rightarrow P(W)$是满足以下条件的映射:

(1)$V(p)\subseteq U$,$p\in\Phi$,$V(\bot)=\varnothing$.

(2)$V(\neg\varphi)=\sim V(\varphi)$.

(3)$V(\varphi\vee\psi)=V(\varphi)\cup V(\psi)$.

(4)$V(\varphi\wedge\psi)=V(\varphi)\cap V(\psi)$.

(5)$V(\varphi\rightarrow\psi)=\sim V(\varphi)\cup V(\psi)$.

(6)$V(\Box\varphi)=Int(V(\varphi))$.

(7)$V(\Diamond\varphi)=Cl(V(\varphi))$.

其中 $Int$,$Cl$ 分别表示拓扑 $T$ 的内部和闭包算子.这时称三元组 $M=(W,T,V)$为系统 $S4$ 的拓扑模型.

设 $\varphi\in$ Form$(\Diamond,\Phi)$,$\varphi$ 叫做在 $M$ 中为真,若 $V(\varphi)$

$=W$. $\varphi$ 叫做拓扑有效的,若 $\varphi$ 在每个拓扑模型中都为真,记作 $\Vdash_T \varphi$.

对于拓扑模型 $M=(W,T,V)$, $M,w \Vdash_T \varphi$ 的定义以及 $S4$ 的拓扑可靠性定理和拓扑强完备性定理可参见文献[3],这里不再重述.

## 3　$S4$ 的覆盖语义

本小节,我们利用第六种覆盖粗糙集模型定义系统 $S4$ 的覆盖语义.

**定义 9**　设 $(U,C)$ 是一个覆盖近似空间, $V$: Form$(\Diamond,\Phi)\to P(U)$ 是满足以下条件的映射:

(1) $V(p)\subseteq U, p\in\Phi, V(\bot)=\varnothing$.

(2) $V(\neg\varphi)=\sim V(\varphi)$.

(3) $V(\varphi\vee\psi)=V(\varphi)\cup V(\psi)$.

(4) $V(\varphi\wedge\psi)=V(\varphi)\cap V(\psi)$.

(5) $V(\varphi\to\psi)=V(\neg\varphi\vee\psi)=\sim V(\varphi)\cup V(\psi)$.

(6) $V(\Box\varphi)=XL_C(V(\varphi))$.

(7) $V(\Diamond\varphi)=XH_C(V(\varphi))$.

这时称三元组 $M=(U,C,V)$ 为系统 $S4$ 的覆盖模型.

设 $\varphi\in$ Form$(\Diamond,\Phi)$, $\varphi$ 叫做在 $M$ 中为真,若 $V(\varphi)=U$. $\varphi$ 叫做覆盖有效的,若 $\varphi$ 在每个覆盖模型中都为真,记作 $\Vdash_C \varphi$.

在定义 9 中定义覆盖有效性时没有从局部做起,而事实上,我们也可以利用覆盖模型给出局部真的定义.

**定义 10**　设 $M=(U,C,V)$ 是一个覆盖模型, $u\in U$,归纳定义 $M,u\Vdash_C\varphi$ 如下:

(1) $M,u\Vdash_C p$ 当且仅当 $u\in V(p)$, $p\in\Phi$, $M,u\Vdash_C\bot$ 永远不成立.

(2) $M,u\Vdash_C\neg\varphi$ 当且仅当 $M,u\Vdash_C\varphi$ 不成立.

(3) $M,u\Vdash_C\varphi\vee\psi$ 当且仅当 $M,u\Vdash_C\varphi$ 或 $M,u\Vdash_C\psi$.

(4) $M,u\Vdash_C\varphi\wedge\psi$ 当且仅当 $M,u\Vdash_C\varphi$ 且 $M,u\Vdash_C\psi$.

(5) $M,u\Vdash_C\Box\varphi$ 当且仅当 $\forall v\in N_C(u)$,都有 $M,v\Vdash_C\varphi$.

(6) $M,u\Vdash_C\Diamond\varphi$ 当且仅当 $\exists v\in N_C(u)$,使得 $M,v\Vdash_C\varphi$.

虽然在覆盖模型 $M=(U,C,V)$ 中 $V$ 是定义在全体公式集 Form$(\Diamond,\Phi)$ 之上的,但在定义 10 中 $V$ 只出现在第(1)个条件之中,即,只用到了 $V$ 在 $\Phi$ 上的限制 $V$: $\Phi\to P(U)$,一个自然地问题就是:如果 $(U,C)$ 是一个覆盖近似空间, $V:\Phi\to P(U)$ 是映射,根据定义 10 定义

$$V(\varphi)=\{u\in U\mid M,u\Vdash_C\varphi\}$$

则 $V$ 是否满足定义 9 中的 7 个条件呢? 前 5 个条件的验证是容易的,这里从略. 以下只验证 $V$ 满足条件(6)和(7).

$$\begin{aligned}V(\Box\varphi)&=\{u\mid M,u\Vdash_C\Box\varphi\}\\&=\{u\mid\forall v\in N_C(u),M,v\Vdash_C\varphi\}\\&=\{u\mid\forall v\in N_C(u),v\in V(\varphi)\}\\&=\{u\mid N_C(u)\subseteq V(\varphi)\}\\&=XL_C(V(\varphi)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(\Diamond\varphi)&=\{u\mid M,u\Vdash_C\Diamond\varphi\}\\&=\{u\mid\exists v\in N_C(u),M,v\Vdash_C\varphi\}\\&=\{u\mid\exists v\in N_C(u),v\in V(\varphi)\}\\&=\{u\mid N_C(u)\cap V(\varphi)\neq\varnothing\}\\&=XH_C(V(\varphi)).\end{aligned}$$

**定义 11**　设 $M=(U,C,V)$ 是覆盖模型, $u\in U$, $\Gamma$ 是非空理论. 如果 $\forall\psi\in\Gamma$ 均有 $M,u\Vdash_C\psi$,则称 $\Gamma$ 在模型 $M$ 中的点 $u$ 处覆盖可满足,简称 $\Gamma$ 覆盖可满足,记为 $M,u\Vdash_C\Gamma$. 如果对每一个模型 $M$ 和每个点 $u$,当 $M,u\Vdash_C\Gamma$ 时有 $M,u\Vdash_C\varphi$,则称 $\Gamma$ 覆盖语义蕴涵 $\varphi$,记为 $\Gamma\Vdash_C\varphi$. 当 $\Gamma$ 为空集时, $\Gamma\Vdash_C\varphi$ 表示 $\Vdash_C\varphi$,即 $\varphi$ 为覆盖有效公式.

## 4　覆盖语义的完备性定理

本小节利用覆盖模型与 Kripke 模型之间的关系,证明了覆盖语义的可靠性和强完备性定理. 首先给出覆盖与自反、传递二元关系之间的关系.

**定义 12**[11]　设 $C$ 为 $U$ 上的一个覆盖,定义 $U$ 上的二元关系 $R(C)$ 如下:

$$xR(C)y \text{ 当且仅当 } y\in N_C(x)$$

称 $R(C)$ 为由覆盖 $C$ 生成的二元关系.

**引理 1**[11]　设 $C$ 为 $U$ 上的一个覆盖,则 $R(C)$ 是自反、传递的二元关系.

**引理 2**[11]　设 $C$ 为 $U$ 上的一个覆盖,则

$$\overline{R(C)}=XH_C, \underline{R(C)}=XL_C.$$

**定义 13**[11]　设 $R$ 是 $U$ 上自反、传递的二元关系,则 $C(R)=\{R_S(u)\mid u\in U\}$ 是 $U$ 上的一个覆盖,称为由 $R$ 生成的覆盖.

**引理 3**[11]　若 $R$ 是 $U$ 上自反、传递的二元关系,则 $XH_{C(R)}=\overline{R}$, $XL_{C(R)}=\underline{R}$.

**定理 3**　设 $M=(U,C,V)$ 是 $S4$ 的覆盖模型,则 $M'=(U,R(C),V)$ 是 $S4$ 的 Kripke 模型. 且模型 $M$ 与模型 $M'$ 等价,即 $\forall\varphi\in$ Form$(\Diamond,\Phi)$, $u\in U$, $M,u\Vdash_C\varphi$ 当且仅当 $M',u\Vdash_K\varphi$.

**证明**　通过比较定义 9 和命题 3 可知, $S4$ 的覆盖模型与 Kripke 模型的不同之处在于公式 $\Box\varphi$ 与 $\Diamond\varphi$ 的赋值不同. 在覆盖模型 $(U_1,C_1,V_1)$ 中, $V_1(\Box\varphi)=XL_{C_1}(V_1(\varphi))$, $V_1(\Diamond\varphi)=XH_{C_1}(V_1(\varphi))$. 而在 Kripke 模型 $(U_2,R_2,V_2)$ 中, $V_2(\Box\varphi)=\underline{R_2}(V_2(\varphi))$, $V_2(\Diamond\varphi)=$

$\overline{R_2}(V_2(\varphi))$.因此,设 $M=(U,C,V)$为 $S4$ 的覆盖模型,下面证明 $M'=(U,R(C),V)$为 $S4$ 的 Kripke 模型.事实上,由引理 1 可知,$R(C)$为自反、传递的二元关系,再由引理 2 可得$\underline{R(C)}=XL_C$,$\overline{R(C)}=XH_C$.所以 $M'=(U,R(C),V)$为 Kripke 模型.且由定义 6 和定义 10,$\forall\varphi\in \mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,$u\in U$,$M,u\Vdash_C\varphi$ 当且仅当$M',u\Vdash_K\varphi$.证毕.

**定理 4 (*S4* 的覆盖可靠性定理)** 系统 $S4$ 中的定理都是覆盖有效公式,即

若 $\vdash_{S4}\varphi$,则$\Vdash_C\varphi$,$\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$.

**证明** 首先证明:若$\Vdash_K\varphi$,则$\Vdash_C\varphi$.任取覆盖模型 $M=(U,C,V)$,令 $M'=(U,R(C),V)$,由定理 3 可知 $M'$为 $S4$ 的 Kripke 模型,且 $M$ 与$M'$等价.又由于$\Vdash_K\varphi$,所以对任意 $u\in U$,$M',u\Vdash_K\varphi$.于是 $M,u\Vdash_C\varphi$.由 $M$ 和 $u$ 的任意性知,$\Vdash_C\varphi$.若 $\vdash_{S4}\varphi$,则由定理 1 知,$\Vdash_K\varphi$,所以$\Vdash_C\varphi$.证毕.

**定理 5** 设 $M=(U,R,V)$是 $S4$ 的 Kripke 模型,则 $M'=(U,C(R),V)$是 $S4$ 的覆盖模型.且模型 $M$ 与模型$M'$等价,即$\forall\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,$u\in U$,$M,u\Vdash_K\varphi$ 当且仅当$M',u\Vdash_C\varphi$.

**证明** 设 $M=(U,R,V)$为 $S4$ 的 Kripke 模型,由引理 3 可得 $XL_{C(R)}=\underline{R}$,$XH_{C(R)}=\overline{R}$.所以 $M'=(U,C(R),V)$为覆盖模型.且$\forall\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,$u\in U$,$M,u\Vdash_K\varphi$ 当且仅当$M',u\Vdash_C\varphi$.证毕.

**定理 6 (*S4* 的覆盖强完备性定理)** 设 $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,若 $\Gamma\Vdash_C\varphi$,则 $\Gamma\vdash_{S4}\varphi$.

**证明** 首先证明:若 $\Gamma\Vdash_C\varphi$,则 $\Gamma\Vdash_K\varphi$.任取 Kripke 模型 $M=(U,R,V)$,若 $M,u\Vdash_K\Gamma$,即$\forall\psi\in\Gamma$,$M,u\Vdash_K\psi$.令 $M'=(U,C(R),V)$,由定理 5 知 $M'$为覆盖模型,且 $M$ 与$M'$等价.于是 $M',u\Vdash_C\psi$,由 $\psi$ 的任意性知 $M',u\Vdash_C\Gamma$.又由于 $\Gamma\Vdash_C\varphi$,所以 $M',u\Vdash_C\varphi$,再由 $M$ 与$M'$的等价性可得$M,u\Vdash_K\varphi$,于是 $\Gamma\Vdash_K\varphi$.若 $\Gamma\Vdash_C\varphi$,则 $\Gamma\Vdash_K\varphi$.再由定理 2 可得 $\Gamma\vdash_{S4}\varphi$.证毕.

**推论 1 (*S4* 的覆盖完备性定理)** 设 $\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,若$\Vdash_C\varphi$,则 $\vdash_{S4}\varphi$.

## 5 *S4* 的覆盖语义与拓扑语义之间的关系

为了下文的需要,首先给出拓扑学中几个概念,其他未给出的概念与性质,可参考文献[13].

**定义 14**[3,14] $U$ 上的拓扑 $T$ 称为一个 Alexandrov 拓扑,如果任意多个开集的交仍是开集.

**引理 4**[3,14] $U$ 上的拓扑 $T$ 是 Alexandrov 拓扑当且仅当 $T$ 的闭包算子保任意并.

**定义 15**[11,13] 若算子 $I:P(U)\to P(U)$满足下面性质,则称 $I$ 为 $U$ 上的内部算子.$\forall X,Y\subseteq U$,

(1)$I(U)=U$;

(2)$I(X)\subseteq X$;

(3)$I(X\cap Y)=I(X)\cap I(Y)$;

(4)$I(I(X))=I(X)$.

由命题 2 和定义 15 可知,第六种覆盖下近似算子 $XL_C$ 为 $U$ 上某拓扑的内部算子,且该拓扑 $T_C=\{XL_C(X)\mid X\subseteq U\}$,称为由覆盖 $C$ 诱导的拓扑.由命题 2 的(1)可知 $XH_C$ 为拓扑 $T_C$ 的闭包算子.另外,下面我们证明 $T_C$ 还是 Alexandrov 拓扑.

**定理 7** $T_C$ 是一个 Alexandrov 拓扑.

**证明** 由于 $XH_C$ 是拓扑 $T_C$ 的闭包算子,所以由引理 4,只需证明 $XH_C(\bigcup_{j\in J}A_j)=\bigcup_{j\in J}XH_C(A_j)$,其中 $J$ 是一指标集.事实上,$\forall x\in XH_C(\bigcup_{j\in J}A_j)$,有 $N_C(x)\cap(\bigcup_{j\in J}A_j)\neq\varnothing$,故$\exists j\in J$,$N_C(x)\cap A_j\neq\varnothing$,于是 $x\in XH_C(A_j)\subseteq\bigcup_{j\in J}XH_C(A_j)$.

反过来,$\forall x\in\bigcup_{j\in J}XH_C(A_j)$,则$\exists j\in J$,$x\in XH_C(A_j)$,由此可知 $N_C(x)\cap A_j\neq\varnothing$,因而 $N_C(x)\cap(\bigcup_{j\in J}A_j)\neq\varnothing$,所以 $x\in XH_C(\bigcup_{j\in J}A_j)$.证毕.

**定理 8** 设 $M=(U,C,V)$为 $S4$ 的覆盖模型,则 $M'=(U,T_C,V)$是 $S4$ 的 Alexandrov 拓扑模型.且模型 $M$ 与模型$M'$等价,即$\forall\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,$u\in U$,$M,u\Vdash_C\varphi$ 当且仅当$M',u\Vdash_T\varphi$.

**证明** 由于 $XH_C$ 和 $XL_C$ 分别为拓扑 $T_C$ 的闭包和内部算子,所以由定义 8 可知 $M'=(U,T_C,V)$是 Alexandrov 拓扑模型,且$\forall\varphi\in\mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,$u\in U$,$M,u\Vdash_C\varphi$ 当且仅当$M',u\Vdash_T\varphi$.证毕.

设 $T$ 为 $U$ 上的 Alexandrov 拓扑,$i$,$c$ 分别为 $T$ 的内部和闭包算子.显然 $T_0=T-\{\varnothing\}$是 $U$ 上的覆盖,那么以 $T_0$ 为覆盖的第六种覆盖上、下近似算子与拓扑 $T$ 的闭包和内部算子有什么关系呢?

**定理 9** 设 $T$ 为 $U$ 上的 Alexandrov 拓扑,则$\forall X\subseteq U$,$XH_{T_0}(X)=c(X)$,$XL_{T_0}(X)=i(X)$.

**证明** 由对偶性,只需证 $XL_{T_0}(X)=i(X)$.事实上,一方面,$\forall x\in XL_{T_0}(X)$,$N_{T_0}(x)\subseteq X$.由于 $T$ 是 Alexandrov 拓扑,对任意交封闭.所以

$$\begin{aligned}N_{T_0}(x)&=\bigcap\{A\mid x\in A\in T_0\}\\&=\bigcap\{A\mid x\in A\in T\}\in T.\end{aligned}$$

由此可知 $N_{T_0}(x)\in\{A\mid A\in T,A\subseteq X\}$.又因为 $i(X)=\bigcup\{A\mid A\in T,A\subseteq X\}$,所以 $N_{T_0}(x)\subseteq i(X)$.再由 $x\in N_{T_0}(x)$得 $x\in i(X)$.因此 $XL_{T_0}(X)\subseteq i(X)$.另一方面,任意 $x\in i(X)$,则存在 $B\in T$,$B\subseteq X$,使得 $x\in B$.故

$$N_{T_0}(x)=\bigcap\{A\mid x\in A\in T_0\}=\bigcap\{A\mid x\in A\in T\}\subseteq B\subseteq X.$$

由 $XL_{T_0}(X)$ 的定义得 $x\in XL_{T_0}(X)$,因此 $i(X)\subseteq XL_{T_0}(X)$.综上可得 $XL_{T_0}(X)=i(X)$.证毕.

**定理 10**　设 $M=(U,T,V)$ 是 Alexandrov 拓扑模型,则由定理 9 可知 $M'=(U,T_0,V)$ 是覆盖模型,且模型 $M$ 与模型 $M'$ 等价,即 $\forall\varphi\in \mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$, $u\in U$, $M,u\Vdash_T\varphi$ 当且仅当 $M',u\Vdash_C\varphi$.

文献[3]提出了如下问题:设 $\varphi\in \mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,如果 $\varphi$ 在每个 Alexandrov 拓扑模型中都为真,问 $\vdash_{S4}\varphi$ 是否成立? 下面我们给出该问题的肯定回答.

**定理 11**　设 $\varphi\in \mathrm{Form}(\Diamond,\Phi)$,如果 $\varphi$ 在每个 Alexandrov 拓扑模型中都为真,那么 $\vdash_{S4}\varphi$.

**证明**　任取覆盖模型 $M=(U,C,V)$,令 $M'=(U,T_C,V)$,由定理 8 可知,$M'$ 为 Alexandrov 拓扑模型,且 $M'$ 与 $M$ 等价.又由于 $\varphi$ 在每个 Alexandrov 拓扑模型中都为真,所以在 Alexandrov 拓扑模型 $M'$ 中,有 $V(\varphi)=U$.再由 $M'$ 与 $M$ 的等价性可知,在覆盖模型 $M$ 中也有 $V(\varphi)=U$.由 $M$ 的任意性可知,$\Vdash_C\varphi$.由 $S4$ 的覆盖完备性定理可得 $\vdash_{S4}\varphi$.证毕.

由定理 11 的证明可知,若 $\varphi$ 在每个 Alexandrov 拓扑模型中都为真,则 $\varphi$ 在每个覆盖模型中都为真.反过来,若 $\varphi$ 在每个覆盖模型中都为真,由 $S4$ 的覆盖完备性定理得 $\vdash_{S4}\varphi$,再由 $S4$ 的拓扑可靠性定理知,$\varphi$ 在每个拓扑模型中都为真,自然 $\varphi$ 在每个 Alexandrov 拓扑模型中都为真.由此可见,本文提出的覆盖语义与 Alexandrov 拓扑语义是和谐一致的.

设 $R$ 为 $U$ 上自反、传递的二元关系,则称 $(U,R)$ 为一个 Kripke 架构(见文献[3]);$C$ 为 $U$ 上的覆盖,则 $(U,C)$ 为一个覆盖近似空间;$T$ 为 $U$ 上的 Alexandrov 拓扑,则 $(U,T)$ 为一个 Alexandrov 拓扑空间.从模态逻辑 $S4$ 的语义角度看,Kripke 架构、覆盖近似空间以及 Alexandrov 拓扑空间是和谐一致的.因此,在这种意义下,Kripke 架构、覆盖近似空间以及 Alexandrov 拓扑空间是同一码事的不同表现形式:Kripke 架构是代数方式的表现,覆盖近似空间是覆盖方式的表现,而 Alexandrov 拓扑空间是拓扑方式的表现.

## 6　结论

本文基于第六种覆盖粗糙集模型提出了模态逻辑 $S4$ 的覆盖语义,利用论域上的覆盖与二元关系之间的关系,证明了覆盖语义的可靠性和完备性定理.讨论了覆盖语义与拓扑语义之间的关系,肯定地回答了文献[3]中提出的问题.随着多值逻辑与不确定性推理的长足发展,许多学者将经典模态命题逻辑进行扩充,建立了多种模糊模态命题逻辑[6~8].另外,许多学者提出了覆盖粗糙模糊集模型,并研究了它们的性质[15].如何利用覆盖粗糙模糊集模型研究模糊模态逻辑的覆盖语义,是一个有价值的课题,我们将在另文中讨论.

## 参考文献


[1] P Blackburn, M de Rijke, Y Venema. Modal Logic[M]. New York: Cambridge University Press, 2001.

[2] P Blackburn, J van Benthem. Modal logic: A semantic perspective[J]. Studies in Logic and Practical Reasoning, 2007, 3: 1 – 84.

[3] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理(第二版)[M].北京:科学出版社,2008.238 – 246.
Wang G J. Non-Classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning (2nd Ed)[M]. Beijing: Science Press, 2008.238 – 246.(in Chinese)

[4] 王国俊,时慧娴.格值模态命题逻辑及其完备性[J].中国科学(F辑),2011,41(1):66 – 76.
Wang G J, Shi H X. Lattice-valued modal propositional logic and its completeness[J]. Science in China: Ser F-Scientia Sinica Informationis, 2011, 41(1): 66 – 76.(in Chinese)

[5] 王国俊,段巧林.模态逻辑中的(n)真度理论与和谐定理[J].中国科学(F辑),2009,39(2):234 – 245.
Wang G J, Duan Q L. Theory of (n) truth degrees of formulas in modal logic and a consistency theorem[J]. Science in China: Ser F-Scientia Sinica Informationis, 2009, 39(2): 234 – 245.(in Chinese)

[6] 胡明娣,王国俊.模糊模态逻辑中的永真式与准永真式[J].电子学报,2009,37(11):2484 – 2488.
Wang G J, Hu M D. Theory of tautologies and quasi-tautologies in fuzzy modal logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(11): 2484 – 2488.(in Chinese)

[7] 汪德刚,谷云东,李洪兴.模糊模态命题逻辑及其广义重言式[J].电子学报,2007,35(2):261 – 264.
Wang D G, Gu Y D, Li H X. Generalized tautology in fuzzy modal propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(2): 261 – 264.(in Chinese)

[8] 张再跃,眭跃飞,曹存根.基于模糊命题模态逻辑的形式推理系统[J].软件学报,2005,16(8):1359 – 1365.
Zhang Z Y, Sui Y F, Cao C G. Formal reasoning system bas-ed on fuzzy propositional modal logic[J]. Journal of Software, 2005, 16(8): 1359 – 1365.(in Chinese)

[9] YY Yao. Generalization of rough sets using modal logics[J]. International Journal of Intelligent Automation and Soft Computing, 1996, 2(2): 103 – 120.

[10] 王国胤,姚一豫,于洪.粗糙集理论与应用研究综述[J].计算机学报,2009,32(7):1229 – 1246.
Wang G Y, Yao Y Y, Yu H. A survey on rough set theory and applications[J]. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(7): 1229 – 1246.(in Chinese)

[11] Zhu William. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering[J]. Information Sciences,2009,179:210 – 225.
[12] Yang Tian,Li Qingguo. Reduction about approximation spaces of covering generalized rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2010,51:335 – 345.
[13] 熊金城.点集拓扑讲义(第二版)[M].北京:高等教育出版社,1998.
Xiong J C. Lecture Notes on Point-Set Topology ( 2nd Ed) [M]. Beijing:Higher Education Press,1998.(in Chinese)
[14] Zhang Huapeng,Ouyang Yao,Wang Zhudeng. Note on "Generalized rough sets based on reflexive and transitive relations" [J]. Information Sciences,2009,179:471 – 473.
[15] 胡军,王国胤,张清华.一种覆盖粗糙模糊集模型[J].软件学报,2010,21(5):968 – 977.
Hu J, Wang G Y, Zhang Q H. Covering based generalized rough fuzzy set model[J]. Journal of software,2010,21(5):968 – 977.(in Chinese)
[16] 周红军.形式系统 $L^*$ 中极大相容逻辑理论的拓扑刻画[J].电子学报,2011,39(12):2896 – 2899.
Zhou H J. Topological characterizations of maximally consistent in the formal deductive system $L^*$ [J]. Acta Electronica Sinica,2011,39(12):2896 – 2899.(in Chinese)
[17] 胡明娣,王国俊.对称逻辑公式在经典逻辑度量空间中的分布[J].电子学报,2011,39(2):419 – 423.
Hu M D,Wang G J. Distribution of the symmetrical logic formulas in the classical logic metric space[J]. Acta Electronica Sinica,2011,39(2):419 – 423.(in Chinese)
[18] 冯林,王国胤,李天瑞.连续值属性决策表中的知识获取方法[J].电子学报,2009,37(11):2432 – 2438.
Feng L,Wang G Y,Li T R. Knowledge acquisition from decision tables containing continuous-valued attributes[J]. Acta Electronica Sinica,2009,37(11):2432 – 2438.(in Chinese)

## 作者简介

**于　海**　男,1979 年 1 月出生于河南开封. 2004 年毕业于陕西师范大学数学与应用数学系,硕士学位,讲师.研究方向:不确定性推理和粗糙集理论.
E-mail:yuhai2000@126.com

**詹婉荣**　女,1981 年 10 月出生于陕西户县. 2004 年毕业于陕西师范大学数学与应用数学系,硕士学位,讲师.研究方向:不确定性推理和和逻辑代数.
E-mail:zhanwanrong@126.com

**张瑞玲(通讯作者)**　女,1964 年 12 月出生,洛阳人.毕业于西北工业大学,硕士学位,洛阳师范学院信息技术学院副院长,教授,主持国家自然科学基金 1 项,主持完成省级项目 8 项,获河南省科技进步二等奖 1 项,主编或副主编教材 8 部.研究方向:粗糙集理论、概念格、本体.
E-mail:ruilingzhang@163.com